

▷ Fonction Logarithme Népérien :

⊗ Définition :

La fonction **Logarithme** Népérien, notée **Log** ou **Ln**, est la **primitive** sur $]0, +\infty[$ de

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 signifie $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.

⇒ Conséquence :

- $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ avec **$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$** ; et **$\ln 1 = 0$**
 $x \mapsto \ln x$

⊗ Propriétés :

- **$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$** ; pour tout $a > 0$ et $b > 0$.
- **$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$** ; pour $b > 0$.
- **$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$** ; pour $a > 0$ et $b > 0$.
- **$\ln(a^n) = n \ln a$** ; pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.
- **$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$** ; pour $a > 0$.
- **$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$** ; pour $a > 0$.

⊗ Limites :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (0^+)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (0^-)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^m x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln^m x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

⊗ Sens de variation :

La fonction Logarithme Népérien est strictement croissante sur \mathbb{R}^*_+ et on a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$(\ln)'(x)$	+	
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$

⇒ Conséquences importantes :

- La fonction Logarithme Népérien est une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} ;
- L'équation : $\ln x = 1$ possède une seule solution notée : e ; on a donc **$\ln e = 1$** .
- Pour $a > 0$ et $b > 0$ on a : **$[\ln a = \ln b] \Leftrightarrow [a = b]$** .
 $[\ln a \geq \ln b] \Leftrightarrow [a \geq b]$.

• Pour tout $x \in]0, 1]$ on a : **$\ln x \leq 0$** .

• Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a : **$\ln x > 0$** .

⊗ Dérivées et primitives :

• Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de \mathbb{R} alors la fonction :

$(\ln \circ u)$ est dérivable sur I et on a : **$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$** .

• Les primitives de la fonction définie sur I par **$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$** sont les fonctions F définies sur I par :

$$\mathbf{F(x) = \ln |u(x)| + k} \quad ; \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

⊗ Primitive de $\ln x$:

Une **primitive** de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction : $x \mapsto \mathbf{x \cdot \ln x - x + k}$. avec $k \in \mathbb{R}$.