| | | | |
|---|---|---|---|
| Lycée Pilote Gabes | 3 Maths | Devoir de synthèse n° : 2<br>Mathématiques | Profs : Louey et Dhiaf<br>Le 06 /03/2012 |

## Exercice n° :1 (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes une et une seule réponse est correcte. Indiquez le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse qui vous paraît correcte.
( aucune justification n'est demandée)

1°) On considère le nombre complexe : $Z = 1 + i\left(\sqrt{3} + i\right)$.

a) On a : $|Z| = 1$. b) On a : $|Z| = 3$ c) $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2°) Soit $Z = 2 + \sqrt{3} + i$

a) $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ b) $\arg(Z) \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi]$ c) $\arg(Z) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

3°) L'ensemble $\{M(z) \in P \ / \ \arg(z + i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\}$ est

a) une droite b) une demi-droite c) un segment

4°) L'ensemble $\left\{M(z),\ \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} + \arg(z-1)[\pi]\right\}$ est

a) une droite privée deux points b) un cercle privé de deux points c) un segment

5°) L'ensemble $\{M(z) \in P \ / \ |\bar{z} - 3i| = |3z - 2i|\}$ est

a) un cercle b) un demi-cercle c) une droite

6°) Le nombre complexe $\left(6 - 2i\sqrt{3}\right)^{2012}$ est un

a) réel strictement positif b) réel strictement négatif c) imaginaire

## Exercice n° :2 (7 points)

On considère le nombre complexe $u = -1 - i + (1 - i)\sqrt{3}$

1°)a) Donner la forme cartésienne de $u^2$.
b) En déduire la forme trigonométrique de $u^2$.

2°)a) Montrer que $|u| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(u) \equiv -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

b) Déterminer alors la valeur exacte $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3°) Le plan est rapporté à un repère orthonormé dir ect $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives u, $(1 - i)\sqrt{3}$ et – 1 – i. Montrer que OBAC est un rectangle.

II°) On considère les points E, F et G d'affixes r espectives a = 1, b = cosθ + isinθ, c = - b , θ∈]0, 2π].
1°) Montrer que E, F et G appartement à un même cer cle $\mathscr{C}$ de centre O et dont on précisera le rayon.
2°) Prouver que [FG] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

3°) En déduire que $\left(\frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}\right)^2$ est un réel négatif.

III°) A tout point M d'affixe z distincte de 1 on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z + 1}{z - 1}$.

Soit I et J les points d'affixes respectives 1 et – 1.

1°) a) Montrer que $\arg(z-1)+\arg(z'-1)\equiv 0[2\pi]$.

b) En déduire que [IJ) est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}\right)$

2°) Montrer que z' est imaginaire si et seulement s i $|z|=1$

3°) En déduire la construction du point M' lorsque M appartient au cercle trigonométrique privé de I et de J.

## *Exercice n° : 3 (4 points)*

Dans le plan orienté, EFG est un triangle isocèle de sommet principal E et vérifiant $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle EFG.
On note $r_1=R_{\left(E,\frac{\pi}{2}\right)}$ et $r_2=R_{\left(G,\frac{\pi}{4}\right)}$. On considère le point D = $r_2$( E ).

1°) Montrer que D est le point d'intersection du ce rcle $\mathscr{C}$ de centre G et de rayon EG et la demi droite [GF).

2°) a) Montrer que $S_{(IG)}oS_{(GE)}=r_2$.

b) Soit $\Delta$ la droite telle que $S_{(GE)}oS_{\Delta}=r_1$.

i) Justifier que $S_{\Delta}=S_{(GE)}or_1$.

ii) Déterminer $S_{(GE)}or_1(F)$ puis en déduire $\Delta$.

3°) On note $f=r_2or_1$. Montrer que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

4°) Prouver à l'aide de f que IE = ID et que (ID) e t (EF) sont parallèles.

## *Exercice n° : 4 ( 6 points )*

On considère une fonction f définie et dérivable sur IR et telle que :

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{48x(1-x)}{\left[(2x-1)^2+1\right]^2}$.

1°) Soit g la fonction définie sur IR par : g(x) = f(1 – x) + f(x).

a) Montrer que g est dérivable sur IR et calculer g'(x).

b) En déduire que pour tout réel x, g(x) = 0

c) Prouver alors que la courbe $\mathscr{C}$ de f possède un centre de symétrie que l'on précisera.

2°) On a représenté ci-contre la courbe représentative de la restriction de f à $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.


L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

a) Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f .

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{ax+b}{2x^2-2x+1}$

3°) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

a) Vérifier que pour tout réel x distinct de $\frac{1}{2}$,

$h(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}+\frac{1}{6(2x-1)}$.

b) Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}_h$.

c) Dresser le tableau de variation de h puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$.

d) Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions dans [0, π] de l'équation :
$2.\cos^2\alpha - (2 + 6m)\cos\alpha + 3m + 1 = 0$.