Trigonométrie

Série d'exercices

3ème Sciences expérimentales **Prof. M. Adnen**

Exercice 1 :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 4\sin(\pi-x) - \cos(\pi+x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

$B = 3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\left(-x-\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin(x-3\pi) - \cos(\pi-x) + 5\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) - 7\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$C = 5\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-x-\frac{5\pi}{2}\right) + 4\cos(-x-9\pi) - 7\cos(-x-8\pi) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) - 3\cos\left(x+\frac{13\pi}{2}\right)$

$D = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 4\sin(\pi-x) - \cos(\pi+x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 2 :

Montrer que les fonctions suivantes sont constantes :

① $f_1(x) = \sin^2 x + \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ ③ $f_3(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$

② $f_2(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^2 x\sin^2 x$ ④ $f_4(x) = 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)$

Exercice 3 :

En utilisant les formules d'addition, calculer :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$; $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 4 :

Montrer les égalités suivantes :

① $\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \tan^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 14$ ③ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{3}$

② $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} = 4$ ④ $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 1+\sqrt{2}$

Exercice 5 :

Déterminer les coordonnées polaires du point M du plan, défini par ses coordonnées cartésiennes dans un repère othonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

① $M\left(1,-\sqrt{3}\right)$ ② $M(-5,5)$ ③ $M\left(-\sqrt{2},0\right)$ ④ $M(0,\ 4)$ ⑤ $M\left(\sqrt{3},\ 1\right)$ ⑥ $M(2\ ;\ -2)$

Exercice 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère les points A, B, C, D, E, F et G de coordonnées polaires respectives :

$A\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$; $C\left(2\sqrt{3};\frac{\pi}{3}\right)$; $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$; $E\left(2\sqrt{3};\frac{2\pi}{3}\right)$; $F\left(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ et $G\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$

① Placer les points A, B, C, D, E, F et G dans le plan.

② Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces points.

③ Montrer que tous ces points sont situés sur un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Représenter l'ensemble des points M dont les coordonnées polaires (r,θ) sont tels que :

① $\begin{cases} r \in [2,\ 4] \\ \theta = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$; ② $\begin{cases} r \in \left[\sqrt{2},\ 5\right] \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$; ③ $\begin{cases} r = 3 \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right] \end{cases}$; ④ $\begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right] \end{cases}$

Exercice 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

① Placer les points A et B de coordonnés polaires respectives $\left(1\ ;\ -\frac{\pi}{8}\right)$ et $\left(\sqrt{3}\ ;\ \frac{3\pi}{8}\right)$.

② Calculer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

③ Calculer la longueur AB.

④ Calculer $\cos\left(\widehat{OBA}\right)$ et $\sin\left(\widehat{OBA}\right)$. En déduire $\widehat{OBA}$.

Exercice 9 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère le spoints A, B et C de coordonnées polaires respectdives $\left(2\,;\frac{-\pi}{6}\right)$; $\left(5\,;\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\left(1\,;\frac{\pi}{2}\right)$.

① Déterminer les coordonnes cartésiennes de ces points.

② En déduire une valeur approchée à 10^{-2} radians près de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 10 :

On pose $D = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$; $S = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$ et $P = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

① a) Montrer que $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$.

b) Calculer $A \equiv 2D\sin\frac{\pi}{3}$ et en déduire que $D = \frac{1}{2}$.

② a) Montrer que $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.

b) Montrer que $P = \frac{1}{4}$.

③ Vérifier que pour tous réels x et y, on a : $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. En déduire que $S = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

④ Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 11 :

On considère les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ et $B(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

① Calculer $S = A(x) + B(x)$ et $D = A(x) - B(x)$.

② En déduire $A(x)$ et $B(x)$.

Exercice 12 :

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

① Montrer que $\tan x = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$.

② En déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{24}$.

③ a) Ecrire $\frac{\pi}{24}$ en fonction de $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{12}$.

b) Déduire $\tan\frac{\pi}{24}$.

Exercice 13 :

On pose $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$.

① a) Calculer $f\left(\frac{507\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{-479\pi}{6}\right)$.

b) Montrer que $f(x) = 4\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) Déduire $\cos\frac{\pi}{12}$.

② On pose $g(x) = \frac{1+\cos(2x)}{1+\cos(2x)+\sqrt{3}\sin 2x}$.

a) Montrer que $g(x) = \frac{\cos(x)}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

b) Déduire $\cot\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit A le point de coordonnées polaires $\left(2\,;\ \frac{\pi}{6}\right)$ et les points B et C tels que : $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OA}$.

① Placer les points A, B et C.

② Déterminer les coordonnées polaires des points B et C.

Exercice 15 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soient A et B les deux points de coordonnées polaires : $A\left(2\,;\ \frac{\pi}{4}\right)$ et $B\left(5\,;-\frac{11\pi}{2}\right)$.

① a) Placer A et B.

b) Placer les points C et D de coordonnées cartésiennes $C\left(1\,,\ -\sqrt{3}\right)$ et $D\left(\sqrt{3}, 1\right)$.

② a) Calculer les coordonnées cartésiennes de A et B.

b) Calculer les coordonnées polaires de C et D.

③ a) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$.

b) Calculer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}}\right)$