

Exercice 1

Pour chacune des 14 questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte

1	La partie réelle du nombre complexe $z = (2 + i)^2$ est	2	
		4	
		3	
2	La partie imaginaire du nombre complexe $z = (1 - i)^2$ est	$-2i$	
		0	
		-2	
3	Le module du nombre complexe $z = 4 + 3i$ est égal à :	7	
		$\sqrt{7}$	
		5	
4	Un argument du nombre complexe $z = 2 - 2i$ est égal à	$\frac{\pi}{2}$	
		$-\frac{\pi}{4}$	
		$\frac{3\pi}{4}$	
5	Si $z = 2 - 5i$ alors	$\bar{z} = 2 + 5i$	
		$\bar{z} = -2 + 5i$	
		$\bar{z} = -2 - 5i$	
6	Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ alors	$z = \sqrt{3} + i$	
		$z = 1 + i\sqrt{3}$	
		$z = 2 + i\frac{\pi}{3}$	
7	La forme exponentielle de $z = -2 - 2i$ est	$z = -2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	
		$z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	
		$z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$	
8	La forme exponentielle de $\frac{-\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}}$ est	$z = -e^{-\frac{3\pi}{40}i}$	
		$z = -e^{\frac{37\pi}{40}i}$	
		$z = \frac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}} e^{i\pi}$	
9	Soient A et B deux points du plan complexe muni du repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'affixes : $z_A = 1 + i$ et $z_B = 3 - i$. Soit I le milieu de [AB] d'affixe z_I alors :	$AB = 2$	
		$z_I = 2$	
		$z_I = \frac{z_A - z_B}{2}$	
10	Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est	$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)$	
		$\frac{\arg(z_B - z_A)}{\arg(z_D - z_C)}$	
		$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$	

11	Soient A, B et C trois points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 3i$ alors	A, B et C sont alignés	
		ABC est un triangle rectangle en A	
		A, B et C appartiennent au cercle de diamètre [AB]	
12	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $2i$. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $2 z-1-i = \sqrt{2}$ est	le cercle de diamètre [AB]	
		le cercle de diamètre AB	
		la médiatrice du segment [AB]	
13	Soient A, B et C trois points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Si $z_C = z_A + z_B$ alors	OACB est un parallélogramme	
		A, B et C sont alignés	
		A est le milieu de [BC]	
14	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $2i$. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $ z-1-i = z-2i $ est	le cercle de diamètre [AB]	
		le cercle de diamètre AB	
		la médiatrice du segment [AB]	

Exercice 2

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit pour tout nombre complexe z différent de 0 et de (-3) , $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$

Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $f(1-i)$ et $f(1+i)$

2. Ecrire sous forme algébrique : $(2+i)^3 + (1-2i)^3$

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a. $3(z-i) - 3i(z-2+3i) = (i-1)(z+i)$

b. $z - 2\bar{z} = 9 + 2i$

4. Pour tout nombre complexe $z \neq i$, On pose $Z = \frac{z-1+2i}{z-i}$

a. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des réels

b. Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires

Exercice 3

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B

d'affixes respectives : $z_A = 1$ et $z_B = i$. On pose $Z = \frac{z-1}{iz+1}$ pour tout $z \neq i$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de z telles que : $Z = 1 + 2i$

2. a. Montrer que $|iz+1| = |z-i|$

b. Déterminer et tracer l'ensemble (E_1) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$

3. a. En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels, vérifier que la partie réelle de Z est

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x+y-1}{x^2+(1-y)^2} \text{ et que la partie imaginaire de Z est } \operatorname{Im}(Z) = \frac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$$

b. Déterminer et tracer l'ensemble (E_2) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel

c. Déterminer et tracer l'ensemble (E_3) des points M d'affixes z tels que z soit un imaginaire pur

Exercice 4

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On considère les points $A(i)$ et $B(-i)$. A tout point M distinct de B d'affixe z on associe le point M'

d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$

- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel
 - Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$
- Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}; z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$
 - En déduire que $(\vec{u}, \widehat{BM'}) + (\vec{u}, \widehat{BM}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et que $BM \times BM' = \sqrt{2}$
 - En déduire que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera

Exercice 5

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$

- Déterminer le module et un argument des nombres complexes : $z_1, z_2, \overline{z_1}$ et $\frac{1}{z_1}$
- Soit Z le nombre complexe tel que $z_1 Z = z_2$
Ecrire Z sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique
- Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

Exercice 6

On considère le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$

- Déterminer la forme trigonométrique de $z; -z; z^2$ et $\frac{2}{z}$
- Montrer que z^{2016} est un réel
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z; -z$ et z^2
 - Déterminer une mesure de l'angle (\vec{AB}, \vec{AC})
 - En déduire la nature du triangle ABC

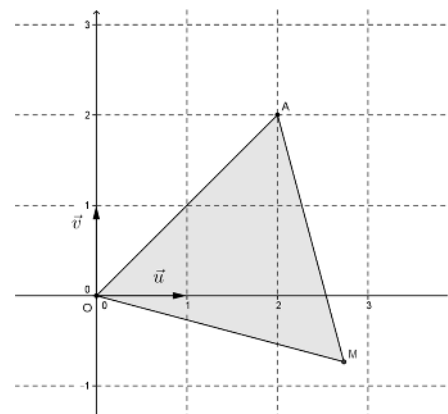
Exercice 7 ☺

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Le triangle OAM est équilatéral.

On donne $A(2,2)$.

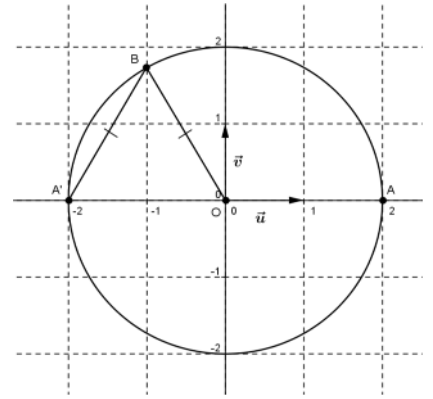
Déterminer le module et un argument de chacun des affixes des points A et M



Exercice 8 ☺

Dans la figure ci-contre, (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé direct du plan, ζ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point de ζ d'affixe z_B .

1. a) Déterminer par une lecture graphique le module et un argument de z_B .
b) En déduire la forme algébrique de z_B .
2. a) Placer sur la figure le point B' d'affixe $z_{B'}$, tel que $z_{B'} = \overline{z_B}$
b) Montrer que $OBA'B'$ est un losange.

**Exercice 9**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B et C les

points d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$; $b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $c = a + b$

1. Ecrire les nombres complexes a et b sous forme exponentielles
2. Placer les points A et B dans (O, \vec{u}, \vec{v})
3. Montrer que OACB est un carré
4. En déduire la forme trigonométrique de c
5. Calculer alors $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 10 ☺

1. Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
 - a) Ecrire z_1 sous forme algébrique.
 - b) Ecrire z_2 sous forme exponentielle.
2. Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{2}z_1$ et $z_B = iz_2$
 - a) Montrer que OAB est un triangle isocèle.
 - b) Ecrire $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
 - c) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
 - d) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. Pour tout point $M(z) \in P \setminus \{B\}$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.
 - a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit la droite (O, \vec{u}) .
 - b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 11 ☺

On considère les nombres complexes suivants: $z = 1+i$, $y = 1-i\sqrt{3}$, $U = \frac{z^3}{y}$

- 1) Écrire sous forme exponentielle z et y . En déduire que $U = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- 2) Montrer que U^{24} est un réel strictement positif et que U^6 est imaginaire.
- 3) a) Vérifier que $U = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
- b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 12 ☺

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et D d'affixes respectives $a = -i, b = 3i$ et $d = -2 + i$

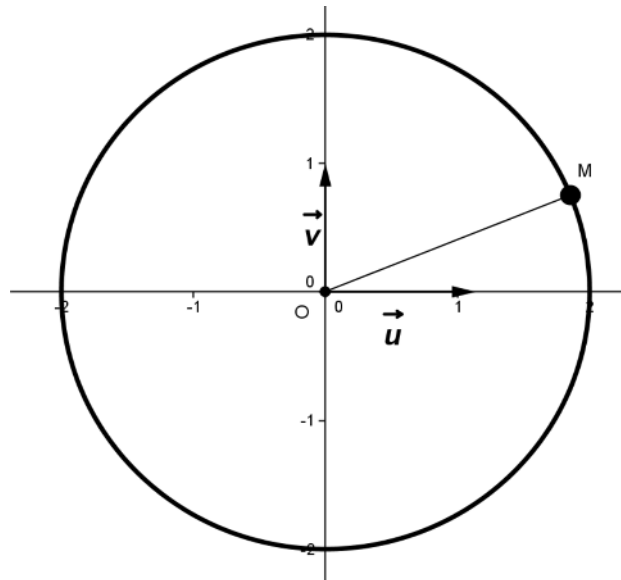
- I-
 - 1- Placer les points A, B et D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 - 2- a- Ecrire $\frac{d-a}{d-b}$ sous forme algébrique.
 - b- Déduire que ABD est un triangle rectangle et isocèle en D .
 - c- Déterminer l'affixe c du point C tel que $ACBD$ soit un carré.
- II- A tout point M distinct de B d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{iz-1}{z-3i}$
 - 1- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est imaginaire.
 - 2- a- Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$
 - b- En déduire que si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.
 - 3- Soit I le milieu du segment $[AB]$ d'affixe z_I .
 - a- Vérifier que $z' - z_I = \frac{-4}{z-b}$.
 - b- En déduire que $(\vec{u}, \widehat{IM'}) \equiv \pi - (\vec{u}, \widehat{BM}) [2\pi]$.
 - c- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite $[B, \vec{u})$ privé de B .

Exercice 13 ☺

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

Dans l'annexe ci-dessous M représente le point d'affixe $z = 2e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

- 1- Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\frac{1}{z}$; $-\frac{1}{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$
- 2- Placer (sur l'annexe) les points N, P et Q d'affixes respectives $\frac{1}{z}$; $-\frac{1}{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$
- 3- Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, N et Q sont alignés.

**Exercice 14** ☺

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i, -1$ et 1 .

A tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z+1}{z-i}$ (z un nombre complexe différent de i).

- 1- a- Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
b- Déterminer l'ensemble de point M tel que z' soit imaginaire.
- 2- a- Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $OM' = \frac{BM}{AM}$.
b- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de segment $[AB]$.
- 3- a- Montrer que $|(z' - 1)(z - i)| = \sqrt{2}$.
b- En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle de centre A est de rayon $\sqrt{2}$

Exercice 15 ☺

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

- 1- a- Ecrire sous forme exponentielle z_A et z_B .
b- Construire les points A et B dans le repère.
c- Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.
d- Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O .
e- Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point C pour que le quadrilatère $OACB$ soit un carré.
- 2- Soit un point M d'affixe $z_M = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
a- Montrer que $z_M = 2 \cos \theta e^{i\theta}$ puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.
b- Déterminer la valeur de θ pour que M varie sur le cercle de centre O et de rayon 2.
c- Déterminer la valeur de θ pour que O, A et M soient alignées.