

CORRIGES DES EXERCICES

⑦ Simplifier le plus possible :

a. $\ln 12 - \ln 8 + \ln 6 = \ln \frac{12 \times 6}{8} = \ln 9 = \ln 3^2 = \boxed{2 \ln 3}$

b. $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = \boxed{\ln(n!)}$

c. $\ln 25 - \ln 10 - \ln 15 = \ln \frac{25}{10 \times 15} = \ln \frac{1}{6} = \boxed{-\ln 6}$

⑧ Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres :

a. $\ln 64 = \ln(2^6) = \boxed{6 \ln 2}$

b. $\ln \frac{1}{16} = -\ln 16 = -\ln(2^4) = \boxed{-4 \ln 2}$

c. $\ln \sqrt{2} - \ln 32 = \frac{1}{2} \ln 2 - \ln(2^5) = \frac{1}{2} \ln 2 - 5 \ln 2 = \boxed{-\frac{9}{2} \ln 2}$

⑨ Donner une valeur approchée de chacun des nombres suivants, sachant que :

$\ln 2 \approx 0,69 \quad \ln 3 \approx 1,10 \quad \ln 5 \approx 1,61 \quad \ln 7 \approx 1,95$

a. $\ln 24 = \ln(2^3 \times 3) = 3 \ln 2 + \ln 3$

$\ln 24 \approx 3 \times 0,69 + 1,10$

$\boxed{\ln 24 \approx 3,17}$

b. $\ln \frac{5}{18} = \ln 5 - \ln 18 = \ln 5 - \ln(2 \times 3^2) = \ln 5 - \ln 2 - 2 \ln 3$

$\ln \frac{5}{18} \approx 1,61 - 0,69 - 2 \times 1,10$

$\boxed{\ln \frac{5}{18} \approx -1,28}$

c. $\ln \frac{9}{14} = \ln 9 - \ln 14 = \ln(3^2) - \ln(2 \times 7) = 2 \ln 3 - \ln 2 - \ln 7$

$\ln \frac{9}{14} \approx 2 \times 1,10 - 0,69 - 1,95$

$\boxed{\ln \frac{9}{14} \approx -0,44}$

⑩ Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto (5 \ln x - 3)^2$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto 5 \ln x - 3$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (produit et différence de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$).

Inutile de chercher dans quel ensemble elle prend ses valeurs car la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} .

f est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de fonction dérivables.

$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f'(x) = 2 \times (5 \ln x - 3) \times \frac{5}{x} \quad \text{formule : } (u^n)' = nu^{n-1}u'$

$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f'(x) = \boxed{\frac{10}{x}(5 \ln x - 3)}$

b. $g : x \mapsto \frac{1-2\ln x}{3+\ln x}$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto 1 - 2\ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (produit et différence de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$).

De même, la fonction $x \mapsto 3 + \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$) et ne s'annule qu'en e^{-3} ($\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$).

g est donc dérivable sur $]0; +\infty[- \{e^{-3}\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble.

$$\forall x \in]0; +\infty[- \{e^{-3}\} \quad g'(x) = \frac{-\frac{2}{x} \times (3 + \ln x) - (1 - 2\ln x) \times \frac{1}{x}}{(3 + \ln x)^2} = \frac{1}{x} \frac{-2(3 + \ln x) - (1 - 2\ln x)}{(3 + \ln x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[- \{e^{-3}\} \quad g'(x) = \frac{1}{x} \frac{-6 - 2\ln x - 1 + 2\ln x}{(3 + \ln x)^2} = \frac{-7}{x(3 + \ln x)^2}$$

c. $h : x \mapsto \ln(2x - \sqrt{x})$

Recherchez tout d'abord l'ensemble de définition ! $h(x)$ existe si et seulement si :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc sur $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$. La fonction

$x \mapsto 2x - \sqrt{x}$ est dérivable sur $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$ (différence de fonctions dérivables sur $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$)

et prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$ (voir recherche de l'ensemble de définition) or la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc h est dérivable sur $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[\quad h'(x) = \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - \sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2x - \sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(2x - \sqrt{x})}$$

ou, si vous préférez, $\forall x \in \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[\quad h'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)} = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2x(2\sqrt{x} - 1)}$

⑪ Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x + 3}$

$$\forall x \in]0; +\infty[- \{1\} \quad \frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x + 3} = \frac{\ln x \left(2 - \frac{1}{\ln x} \right)}{\ln^2 x \left(1 + \frac{3}{\ln^2 x} \right)} = \frac{1}{\ln x} \times \frac{2 - \frac{1}{\ln x}}{1 + \frac{3}{\ln^2 x}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ théorèmes d'opérations ... $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x - 1}{\ln^2 x + 3} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x - 1}{\ln^2 x + 3}$

On utilise la même écriture $\forall x \in]0; +\infty[- \{1\}$ $\frac{2 \ln x - 1}{\ln^2 x + 3} = \frac{1}{\ln x} \times \frac{2 - \frac{1}{\ln x}}{1 + \frac{3}{\ln^2 x}}$ et comme

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ théorèmes d'opérations ... $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x - 1}{\ln^2 x + 3} = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \pi + 2 \ln x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \pi) = -\pi$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \pi + 2 \ln x) = -\infty$

⑰ Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

$\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1+x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$. Ensemble de définition : \mathbb{R}^* .

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ (théorème de composition)

or $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$ (théorème de multiplication)

b. $\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3)\ln(x+3) - x]$

$\lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)\ln(x+3) = 0$ (théorème de composition)

$\lim_{x \rightarrow -3} [(x+3)\ln(x+3) - x] = 3$ (théorème d'addition)

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

On a déjà déterminé l'ensemble de définition \mathbb{R}^* .

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]}{x} = \frac{\ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x}$

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x}$

Par théorème (croissances comparées) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ et comme $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$

théorème de division : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x} = 0$ et théorème d'addition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

CORRIGES DES EXERCICES

d. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2)$

$x \ln(x^2)$ existe si et seulement si $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ensemble de définition : \mathbb{R}^* .

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x \ln(x^2) = 2x \ln|x|$

$\forall x \in]0; +\infty[\quad x \ln(x^2) = 2x \ln x \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2) = 0$

$\forall x \in]-\infty; 0[\quad x \ln(x^2) = 2x \ln(-x) = -2(-x) \ln(-x)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0^+ \quad \text{or} \quad \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) \ln(-x) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \ln(x^2) = 0$

Bilan : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) = 0$.

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-1}{x+1}$

$\ln \frac{x-1}{x+1}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$. Ensemble de définition : $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = 0$ (théorème de composition)

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$

$\frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ \ln(x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ x+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

Ensemble de définition : $] 2 ; +\infty [$.

$$\forall x \in] 2 ; +\infty [\quad \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)} = \frac{\ln \left[x \left(1 - \frac{2}{x} \right) \right]}{\ln \left[x \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]} = \frac{\ln x + \ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{\ln x + \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{\ln x \left[1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{\ln x} \right]}{\ln x \left[1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\ln x} \right]} = \frac{1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{\ln x}}{1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\ln x}}$$

Appliquez les théorèmes d'opérations ... $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)} = 1$

⑱ Résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(11-7x)$

Ensemble de définition : $] -3; \frac{11}{7} [$ car $\begin{cases} x+3 > 0 \\ 11-7x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ \frac{11}{7} > x \\ 2 > x \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < \frac{11}{7}$

CORRIGES DES EXERCICES

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[(x+3)(2-x)] = \ln(11-7x) \\ -3 < x < \frac{11}{7} \end{cases}$$

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-x) = 11-7x \\ -3 < x < \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - 6x + 5 \\ -3 < x < \frac{11}{7} \end{cases}$$

$$\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=5 \\ -3 < x < \frac{11}{7} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est {1}.

b. $\ln(x-e) + \ln x = 2 + \ln 2$

Ensemble de définition : $]e; +\infty[$ car $\begin{cases} x-e > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > e$

$$\ln(x-e) + \ln x = 2 + \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[(x-e)x] = \ln e^2 + \ln 2 \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[(x-e)x] = \ln 2e^2 \\ x > e \end{cases}$$

$$\ln(x-e) + \ln x = 2 + \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-e)x = 2e^2 \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - ex - 2e^2 = 0 \\ x > e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2e \text{ ou } x = -e \\ x > e \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est {2e}.

c. $\ln(x-2) - \ln x = \ln(2x-3)$

Ensemble de définition : $]2; +\infty[$ car $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

$$\ln(x-2) - \ln x = \ln(2x-3) \Leftrightarrow \ln(x-2) = \ln x + \ln(2x-3)$$

$$\ln(x-2) - \ln x = \ln(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2) = \ln[x(2x-3)] \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x(2x-3) \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\ln(x-2) - \ln x = \ln(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x^2 - 4x + 2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2(x-1)^2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est { }.

d. $\ln(x-1) - \ln(x+1) = -\ln(2x-4)$

Ensemble de définition : $]2; +\infty[$ car $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) = -\ln(2x-4) \Leftrightarrow \ln(x-1) + \ln(2x-4) = \ln(x+1)$$

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) = -\ln(2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[(x-1)(2x-4)] = \ln(x+1) \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-4) = x+1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\ln(x-1) - \ln(x+1) = -\ln(2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est {3}.

CORRIGES DES EXERCICES

⑲ Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\ln x - \ln(x+1) \geq \ln(x+3) - \ln(x-4)$

Ensemble de définition : $]4; +\infty[$ car $\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ x > -3 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$

$\ln x - \ln(x+1) \geq \ln(x+3) - \ln(x-4) \Leftrightarrow \ln x + \ln(x-4) \geq \ln(x+3) + \ln(x+1)$

$\ln x - \ln(x+1) \geq \ln(x+3) - \ln(x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[x(x-4)] \geq \ln[(x+3)(x+1)] \\ x > 4 \end{cases}$

$\ln x - \ln(x+1) \geq \ln(x+3) - \ln(x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geq (x+3)(x+1) \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x \geq 3 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{8} \\ x > 4 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\{ \}$.

b. $\ln(x+1) - \ln(2-x) \leq \ln(3-x)$

Ensemble de définition : $] -1; 2[$ car $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 2 > x \\ 3 > x \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$

$\ln(x+1) - \ln(2-x) \leq \ln(3-x) \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq \ln(3-x) + \ln(2-x)$

$\ln(x+1) - \ln(2-x) \leq \ln(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x+1) \leq \ln[(3-x)(2-x)] \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq (3-x)(2-x) \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

$\ln(x+1) - \ln(2-x) \leq \ln(3-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 - 6x + 5 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $] -1; 1]$.

c. $\ln(2x-7) \leq \ln(x+3)$

Ensemble de définition : $\left] \frac{7}{2}; +\infty \right[$ car $\begin{cases} 2x-7 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{2} \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$

$\ln(2x-7) \leq \ln(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 \leq x+3 \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} < x \leq 10$

L'ensemble des solutions est $\left] \frac{7}{2}; 10 \right]$.

⑳ Etudier la parité des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto x^2 \ln|x|$

$f(x)$ existe si et seulement si $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. L'ensemble de définition de f est \mathbb{R}^* .

Il est bien symétrique par rapport à 0.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(-x) = (-x)^2 \ln|-x| = x^2 \ln|x| = f(x)$

La fonction f est paire.

b. $g : x \mapsto \ln \frac{2+x}{2-x}$

$g(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ \frac{2+x}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 2$. L'ensemble de

définition de g est $] -2 ; 2[$. Il est bien symétrique par rapport à 0.

$$\forall x \in] -2 ; 2[\quad g(-x) = \ln \frac{2+(-x)}{2-(-x)} = \ln \frac{2-x}{2+x} = \ln \frac{1}{\frac{2+x}{2-x}} = -\ln \frac{2+x}{2-x} = -g(x)$$

La fonction g est impaire.

c. $h : x \mapsto x \ln(|x|-1)$

$h(x)$ existe si et seulement si $|x|-1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 1)$. L'ensemble de définition de h est $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; \infty [$. Il est bien symétrique par rapport à 0.

$$\forall x \in] -\infty ; -1[\cup] 1 ; \infty [\quad g(-x) = \ln \frac{2+(-x)}{2-(-x)} = \ln \frac{2-x}{2+x} = \ln \frac{1}{\frac{2+x}{2-x}} = -\ln \frac{2+x}{2-x} = -g(x)$$

La fonction h est impaire.

② 1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit $P_n = (1+1) \left(1+\frac{1}{2}\right) \left(1+\frac{1}{3}\right) \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Constater que P_n s'exprime très simplement en fonction de n .

$$P_n = (1+1) \left(1+\frac{1}{2}\right) \left(1+\frac{1}{3}\right) \dots \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

En déduire la valeur de : $P'_n = \ln 2 + \ln \left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln \left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$P'_n = \ln 2 + \ln \left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln \left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln \left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln \left[2 \times \left(1+\frac{1}{2}\right) \times \left(1+\frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1+\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$P'_n = \ln P_n = \ln(n+1)$$

Les suites (P_n) et (P'_n) tendent-elles vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$$

de plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ (théorème de composition)

2. Soit le produit $R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$.

Constater que R_n s'exprime très simplement en fonction de n .

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\frac{2}{3}} \times \dots \times \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$R_n = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

CORRIGES DES EXERCICES

En déduire la valeur de : $R'_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

$$R'_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$R'_n = \ln\left(\frac{1}{R_n}\right) = \ln \frac{1}{n} = -\ln n$$

Les suites (R_n) et (R'_n) tendent-elles vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R'_n = -\infty$.

3. Calculer : $Q'_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

$$Q'_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$Q'_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] + \ln\left[\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] + \dots + \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$Q'_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$Q'_n = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln 2$$

$$Q'_n = P'_n + R'_n - \ln 2 = \ln(n+1) - \ln n - \ln 2 = \ln \frac{n+1}{2n}$$

La suite (Q'_n) tend-elle vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad (\text{théorème sur fonctions rationnelles}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln x = \ln \frac{1}{2} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q'_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad (\text{théorème de composition})$$

En déduire la limite, si elle existe, de : $Q_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Puisque $Q'_n = \ln Q_n$ $Q_n = e^{Q'_n}$ d'où (encore une composition) $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

② Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \ln \frac{2x+1}{x+1}$ et la représenter graphiquement.

$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{2x+1}{x+1} > 0$, ce qui équivaut à $x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$ est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{-1\}$. Elle est donc dérivable sur D_f et prend alors ses valeurs dans $]0; +\infty[$ d'après l'étude de signe faite plus haut. Or la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 f est donc dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{2 \times (x+1) - (2x+1) \times 1}{\frac{(x+1)^2}{x+1}} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)}$$

CORRIGES DES EXERCICES

Le signe d'un produit étant le même que celui d'un quotient, $f'(x)$ est strictement positive sur D_f donc f est strictement croissante sur $] -\infty; -1 [$ et sur $] -\frac{1}{2}; +\infty [$.

Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim_{X \rightarrow 2} \ln X = \ln 2$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$ (composition)

Limite finie d'où asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$. Mêmes conclusions en $+\infty$.

Limite en -1 : $\lim_{x \rightarrow -1} (2x+1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ et si $x < -1$ alors $x+1 < 0$ donc

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$. De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ (composition).

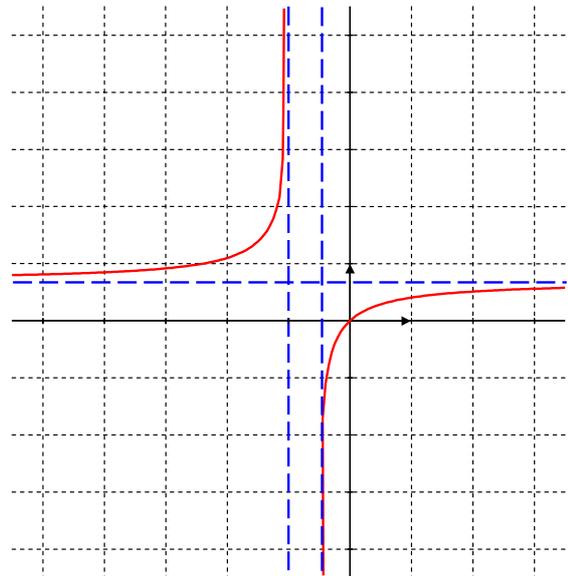
Limite infinie donc asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Limite en $-\frac{1}{2}$: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (x+1) = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x+1} = 0$. De plus,

$\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ (composition).

Limite infinie donc asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	/	/	+
$f(x)$	$\ln 2$ ↗	↗	↘	$-\infty$ ↘ $\ln 2$



Calculer $\frac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2}$. Que peut-on en conclure pour la représentation graphique de f ?

$$f\left(-\frac{3}{4}+h\right) = \ln \frac{2\left(-\frac{3}{4}+h\right)+1}{\left(-\frac{3}{4}+h\right)+1} = \ln \frac{-\frac{3}{2}+2h+1}{-\frac{3}{4}+h+1}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}+h\right) = \ln \frac{-\frac{1}{2}+2h}{\frac{1}{4}+h} = \ln \frac{-2+8h}{1+4h}$$

On obtient $f\left(-\frac{3}{4}-h\right)$ en remplaçant h par $-h$: $f\left(-\frac{3}{4}-h\right) = \ln \frac{-2-8h}{1-4h}$

$$\frac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2} = \frac{\ln \frac{-2+8h}{1+4h} + \ln \frac{-2-8h}{1-4h}}{2} = \frac{\ln \left(\frac{-2+8h}{1+4h} \times \frac{-2-8h}{1-4h} \right)}{2}$$

$$\frac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2} = \frac{\ln \left(\frac{2(4h-1)}{4h+1} \times \frac{-2(4h+1)}{-(4h-1)} \right)}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \frac{2 \ln 2}{2} = \ln 2$$

Ce résultat est constant. La courbe admet donc un centre de symétrie de coordonnées $\left(-\frac{3}{4}; \ln 2\right)$.

24 Partie A - Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.

a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

La droite Δ est la tangente à Γ au point d'abscisse 0. En effet, celle-ci a pour équation :

$$y = \exp'(0) \times (x - 0) + \exp(0) \Leftrightarrow y = e^0 x + e^0 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

b. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ .



2. a. Démontrer que pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Considérons la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - (t + 1)$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} (différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}). $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = e^t - 1$.

- Si $t < 0$, alors $e^t < 1$ donc $\varphi'(t) < 0$ et comme φ est dérivable sur $]-\infty; 0]$, φ est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- Si $t > 0$, alors $e^t > 1$ donc $\varphi'(t) > 0$ et comme φ est dérivable sur $[0; +\infty[$, φ est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- En 0, la dérivée de φ s'annule en changeant de signe. φ admet un minimum absolu égal à $\varphi(0) = 0$, d'où $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) \geq 0$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t - (t + 1) \geq 0$ d'où $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq t + 1$.

Cela veut dire que la courbe Γ est au-dessus de sa tangente Δ .

b. En déduire que pour tout réel t , $e^{-t} + t + 1 \geq 2$, et que pour tout x de \mathbb{R}_+^* , on a $\frac{1}{x} + \ln x + 1 \geq 2$.

Puisque l'inégalité $e^t \geq t + 1$ est vraie pour tout réel t , on peut remplacer t par $-t$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-t} \geq -t + 1 \quad \text{d'où} \quad e^{-t} + t \geq 1. \quad \text{On ajoute 1 pour obtenir} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-t} + t + 1 \geq 2.$$

Tout nombre réel est le logarithme népérien d'un réel strictement positif. On peut donc

$$\text{remplacer } t \text{ par } \ln x : \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad e^{-\ln x} + \ln x + 1 \geq 2 \quad \text{d'où} \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad e^{\frac{\ln 1}{x}} + \ln x + 1 \geq 2 \quad \text{ce}$$

$$\text{qui revient à} \quad \forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{1}{x} + \ln x + 1 \geq 2.$$

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = (x + 1)\ln x$.

On appelle C la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 2 cm).

1. a. Étudier le sens de variation de g en utilisant la partie A.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

$$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad g'(x) = 1 \times \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

D'après le A.2.b., $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad g'(x) \geq 2$. La dérivée de g est donc strictement positive sur $]0 ; +\infty[$ et par suite g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

Limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ (théorème de multiplication)

Cette limite est infinie. C admet donc l'axe des ordonnées pour asymptote.

Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. a. Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.

Cette équation est : $y = g'(1) \times (x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = 2(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$

b. On appelle h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.

Étudier le sens de variation de h . (On pourra utiliser la question A.2.b.).

Puisque g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $x \mapsto -2x + 2$ dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynôme), h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad h'(x) = g'(x) - 2$ or on a montré que $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad g'(x) \geq 2$ donc $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad h'(x) \geq 0$ et la fonction h est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

h s'annule en 1 (la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est tangente à C au point d'abscisse 1) et est croissante sur $]0 ; +\infty[$. Par conséquent, h est négative sur $]0 ; 1[$ et positive sur $]1 ; +\infty[$.

c. Étudier la position de C par rapport à D .

La position de C par rapport à D s'étudie au moyen du signe de la différence $g(x) - (2x - 2)$, c'est-à-dire $h(x)$, signe étudié à la question précédente.

C est donc au-dessous de D sur $]0 ; 1[$ et au-dessus de D sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Remarquons qu'en 1, C traverse donc sa tangente.

Il s'agit d'un **point d'inflexion**.

3. Tracer C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

