Résumé : **Nombres complexes**
Niveau : *Bac Sciences Techniques*
Réalisé par : *Prof. B.H.Mourad*

Propriétés :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$
3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$
5. $z + \bar{z} = 2a$
6. $z - \bar{z} = 2ib$
7. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème :

Soit $z$ un nombre complexe.

- $z$ est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

*"Module d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de $z$ et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

1. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

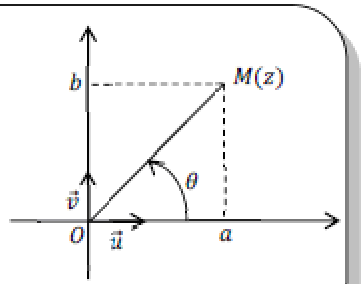
Définition : *"Argument d'un nombre complexe"*

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$z = a + ib$ ($a$ et $b$ sont des réels) est un nombre complexe non nul d'mage $M$.

On appelle **argument** de $z$ et on note $arg(z)$, toute mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

$arg(z) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) + 2k\pi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$




Propriétés :

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls.

1. $arg(\bar{z}) = -arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $arg(z \cdot z') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $arg(z^n) = n \cdot arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
6. $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Théorème :

Soit $z$ un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $z = a + ib$ et $\theta$ un argument de $z$. Alors : $\boldsymbol{a = |z|\cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = |z|\sin\theta}$ ou encore : $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$

On a alors $\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$

Définition : *"Forme trigonométrique d'un nombre complexe"*

Soit $z$ un nombre complexe non nul.

L'écriture de $z$ sous la forme $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $[|z|, \theta]$ où $\theta$ désigne un argument de $z$ est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de $z$.

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \theta]}$$

$|z|$ et $\theta$ sont les **coordonnées polaires** du point $M(z)$.

Propriétés :

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. $\bar{z} = [r, -\theta]$
2. $z \cdot z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$
3. $z^n = [r^n, n\theta]$
4. $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
5. $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

1. $\boldsymbol{(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel.
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaire pur.

# *Les équations*

**Théorème**

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$, où $\delta$ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $a + b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : 1 et $\frac{c}{a}$.
- Si $a - b + c = 0$, alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : -1 et $-\frac{c}{a}$

Si $z_1$ et $z_2$ sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.