EXERCICE N°1:

Déterminer la limite (éventuelle) des suites (u_n) ci-dessous :

1) $u_n = 1+\frac{1}{2^n}$ 2) $u_n = \frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 3) $u_n = 7+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 4) $u_n=3\times(-2)^n$

5) $u_n=5^n$ 6) $u_n = \frac{2n}{n+1}$ 7) $u_n = \frac{1}{n+3}$

Calculer chacune des sommes suivantes

$$S = \sum_{k=0}^{8} 2k+1 \quad \text{et} \quad S' = \sum_{k=0}^{4} -3.2^k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} -3.2^k$$

EXERCICE N°2:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) **a) Montrer par récurrence que $u_n \succ -1$.**

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n+1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N°3:

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{2+U_n} \end{cases}$ pour tout $n \in N$

1) ***a/*** Calculer U_1 et U_2

b/ Déduire que la suite U est ni arithmétique , ni géométrique

2) ***a/*** Montrer , par récurrence, que pour tout $n \in N$; $0 \le U_n \le 2$

b/ Montrer que la suite U est croissante.

c/ Déduire que U est convergente et calculer sa limite

3) On pose la suite V définie par $V_n = 1-\frac{2}{U_n}$, pour tout $n \in N$

a/ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b/ Calculer la limite de V_n puis retrouver la limite de U_n

4) ***a/*** Montrer que, pour tout $n \in N$, on a : $|U_{n+1}-2| \le \frac{2}{3}|U_n - 2|$

b/ En déduire que, pour tout $n \in N$, $|U_n - 2| \le (\frac{2}{3})^n$

c/ Retrouver la limite de U_n.

EXERCICE N°4:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{6-u_n}{4-u_n}; \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n \prec 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-2)(u_n-3)}{4-u_n}$.

c) Montrer alors que la suite (u_n) est croissante.

d) Déduire que (u_n) est convergente.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{2u_n - 6}{u_n - 2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{3-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

d) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°5:

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

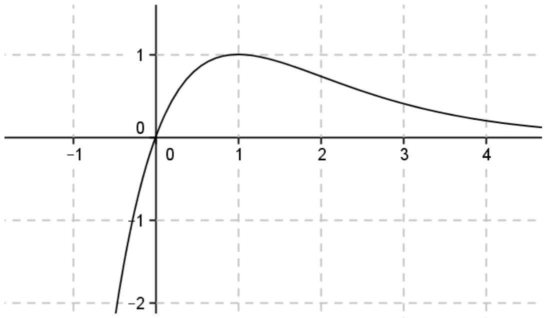
c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$

b) Retrouver le résultat du 1.c)

c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2(4-u_n)$

EXERCICE N°6:



ci-contre la représentation d'une fonction f

par une lecture graphique déterminer :

f(0) , f(1) , le sens de variation de f sur [0,1]

et le signe de f(x)-x sur [0,1]

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } 0 < a < 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le u_n \le 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°7:

1) Soit u la suite définie sur N^* par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

a)Montrer que u est croissante.

b) Montrer que $\forall n \in N^*$ $u_{2n} - u_n \ge 1$

c) Montrer que u n'est pas majorée.

d)En déduire la limite de la suite u.

2)Soit la suite v définie sur N^* par $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Montrer que $\forall n \in N^*, u_n \leq v_n$

b) Montrer que $\forall k \in N^*, \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

c) Montrer alors que $\forall n \in N^*, u_n \leq 2\sqrt{n}$ et déduire $\lim\left(\frac{u_n}{n}\right)$

EXERCICE N°8:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose $u_0 = 1$.

a) Démontrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{3}\right)^2$

b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n-1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de *n*.

b) Calculer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$

EXERCICE N°9:

Soit (U) la suite définie sur IN* par $U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots\ldots + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

1°/a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$.

b- En déduire que (U) est convergente et calculer sa limite.

2°/a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

b- Déduire que pour tout $n \in IN^*$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3°/ Soit $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$.

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $2n - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}) \leq S_n \leq 2n + 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n})$

b- En déduire que pour tout $n \in IN^*$: $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$; puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE N°10:

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1) On pose la suite V définie par $V_n = U_n - 6$, pour tout $n \in IN$

a/ Montrer que V est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c/ Retrouver la limite de U_n

2) On considère les sommes $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$ et $S_n' = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1}$

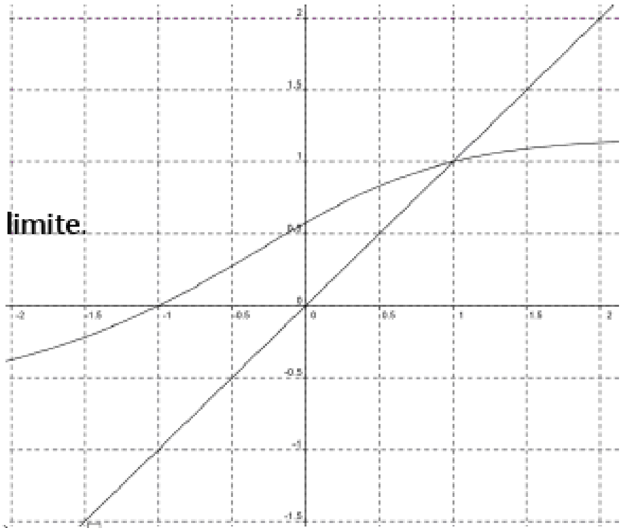
a/ Calculer la somme S_n (en fonction de n) puis S_n'

b/ Calculer $\lim .S_n$ et $\lim \dfrac{S_n'}{n}$

EXERCICE N°11:

Dans la graphe ci-dessous on a représenté la courbe (C)d'une fonction f définie sur [-2 , 2] et la droite D d'équation : y= x

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$



1/ En utilisant le graphique :

a) **Quel est le sens de variation de f ?**

b) **Déterminer le signe de [f(x)-x] sur [-2,2]**

2/a) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq U_n \leq 1$

c) **Vérifier que la suite U est croissante**

d) **En déduire que U est convergente et calculer sa limite.**

3/ On considère la suite $(t_n)_{n>0}$ définie par $t_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} U_k$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

4/ La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x^2+3}}$

On désigne par V la suite définie par $V_n = \sum_{k=0}^{n}(2U_{k+1} - U_k)\ ;\ n \in \mathbb{N}$

a) **Montrer que pour tout** $n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} \geq \dfrac{1+U_n}{2}$. En déduire que $V_n \geq n+1$

b) **Déterminer, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

EXERCICE N°12:

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Vérifier que : $u_1 = 2$ et $v_1 = 3$, puis calculer u_2, u_3, v_2 et v_3.

2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

3. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n \times (n+1) \times (n+1)!}$.

   b) En déduire que (v_n) est une suite strictement décroissante.

4. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $n! \geq n$.

   b) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n!$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n \times n!}$.

   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE N°13:

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_n = \dfrac{n.(1+(-1)^n)}{n^2+1}$, pour tout entier n

1∗ Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}

2∗ Déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite