| L.S Bach-Hamba<br>B .H. Mourad | Logarithme népérien | Mathématiques |
|---|---|---|

## Exercice n :1
Réduire et compléter

$$2\ln 3 - 3\ln(2) = \ln(....)$$

$$\frac{1}{2}\ln(4) + 2\ln(2) - \ln(8) = \ln(...) = ....$$

## Exercice n :2
Résoudre

$\ln(x+1) = -1$

$\ln(x) + \ln(x+1) = 0$

$\ln(x) \leq -1$

$\ln(2x+1) \prec 0$

## Exercice n :3
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1- f(x) = x + 5 – ln x donc f ‘ (x) =
2- f(x) = ( x – 3 ) ln x donc f ‘ (x) =
3- f(x) = x ln x donc f ‘ (x) =
4- f(x) = ( ln x ) ² donc f ‘ (x) =
5- f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ donc f ‘ (x) =

## Exercice n :4
Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \ln(-7x+3)$ , $\lim\limits_{x\mapsto 5^-} \ln(5-x)$ , $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 5x-6-3\ln x$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \ln(x^2+3x-9)$ , $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln(x^7)}{x}$ , $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(2x-9)}$

## Exercice n:5
1- Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln(x)$

a) Dresser le tableau de variation de g
b) Calculer *g(1)* et Déduire le signe de *g(x)*

## Problème n:1
Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $f(x) = x - ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$ .

On désigne par $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) Calculer les limites de $f$ aux bornes de $]0\,,+\infty[$.
2) $a/$ Montrer que, pout tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2+x-1}{x(2x+1)}$ .

   $b/$ Etablir le tableau de variations de $f$.
3) $a/$ Montrer que la droite $\Delta: y = x + ln2$ est une asymptote de $C_f$ .

   $b/$ Comparer pour $x > 0$, $\frac{2x}{2x+1}$ et 1, en déduire la position de $C_f$ par rapport à $\Delta$ .
4) Tracer $\Delta$ et $C_f$ .

## *Problème n:2*

Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ .

| x | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| f | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On suppose que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f passe par le point A(1,1) et que la tangente T à cette courbe en ce point a pour équation y = x.

1) a) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Déterminer f (1) et f '(1).

2) La fonction f est définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln x) & \text{, pour tout } x \in ]0,+\infty[ \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on précisera.

   c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

   d) Tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

## *Problème n:3*

I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x(x-1) + \ln x$ .

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ .
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$ .

II. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2 x$ .

On désigne par $C_1$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = 2\dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$ .

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ .

2. Montrer que la restriction h de f à $]0, 1]$ est une bijection de $]0, 1]$ sur $[0, +\infty[$ .

On désigne par $h^{-1}$ la réciproque de h et par $C_2$ la courbe représentative de $h^{-1}$

3. Soit u la fonction définie sur $]0, 1]$ par $u(x) = h(x) - x$ .

a. Dresser la tableau de variation de u sur $]0,1]$.

b. En déduire qu'il existe un seul réel a de $]0, 1]$ tel que $h(a) = a$ .Vérifier que $0.5 < a < 1$.

2. a. Montrer que $C_1$ admet au $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ .

b. Tracer la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ , la courbe $C_1$ et la courbe $C_2$ .

## Problème n:4

**Partie A :** On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\ln x-2x^2-1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$
2. Déduire le signe de g(x) sur$]0\ ;\ +\infty[$ .

**Partie B :** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=1-2x-\frac{\ln x}{x}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction $f$ en 0.
2. a. Démontrer que la droite D d'équation $y = 1 - 2x$ est asymptote à la courbe $(\zeta_f)$.
   b. Étudier la position de la courbe $(\zeta_f)$ par rapport à la droite D.
3. a. Démontrer que pour tout $x$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ , $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
4. Tracer la droite D et la courbe $(\zeta_f)$

## Problème n:5

**A//** On considère la fonction polynôme $p$ définie par $p(x)=3x^3-x-2$

1) Vérifier que $p(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$
2) Déduire le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de $x$

**B//** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $g(x)=x^3-x+1-2\ln x$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction $g$
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*_+$

**C//** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x)=x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Vérifier que les droites D et D' d'équations respectives "x = 0" et "$y = x + 1$" sont des asymptotes à la courbe C
2) a) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = x + \ln(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ sur un intervalle que l'on précisera
   b) En déduire que l'asymptote D' coupe C en un point unique d'abscisse $\alpha$ tel que $\alpha+\ln\alpha = 0$ et que $0.56 < \alpha < 0.57$
   c)Déterminer la position relative de C par rapport à D'
3) Etudier les variations de f
4) En déduire l'existence d'un réel unique $\beta\in]0.46;0.47[$ tel que $f(\beta) = 0$
5) Tracer C
6) Pour tout x de $\mathbb{R}^*_+$ on pose $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$

   Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}^*_+$ qui s'annule en 1

## Problème n:6

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2-\ln(x)}$ .

1. a. Déterminer le domaine de définition de f

   b. Déterminer les limites de f aux bornes de ce domaine.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

3. Montrer que l'image par f de l'intervalle [1, e] est contenue dans l'intervalle [1, e].

4. Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique a sur l'intervalle [1, e].

(On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

5. On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer à l'aide de l'inégalités des accroissements finis que :

$| u_{n+1} - a | \leq [1/2]| u_n - a |$.

b. Déterminer un entier n tel que $| u_n - a | \leq 10^{-2}$.

c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$?

## *Problème n:7*

A// Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - x + (2x-1)\ln x$ .On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

1)a)Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et calculer f '(x) ; f "(x)

b) Calculer f '(1) et en déduire les variations de f

2)a)Préciser la position relative de C par rapport à la droite $\Delta : y = x$ puis tracer C

b)déterminer l'aire en cm² de la partie du plan limitée par C ; $\Delta$ et les deux droites d'équations respectives " x=1 "et " x = e"

B//1)On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

a)Montrer que $\forall x \in ]1, +\infty[, \frac{x-1}{2x-1} \prec \ln x \prec x - 1$

b) Etablir que pour tout $k \in \{1,2,3,\dots,n\}$ on a $\frac{k}{n^2+2n} \prec \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \prec \frac{k}{n^2}$

c) En déduire que u est convergente et trouver sa limite